
Exercice 1. On considère l'application θ de $K^p \times \cdots \times K^p = (K^p)^p$ dans K donnée par

$$\theta(X_1, \cdots, X_p) = \det \begin{pmatrix} X_1 & \cdots & X_p & C \\ & 0 & & B \end{pmatrix}$$

Cette application est p-linéaire et alternée. Le théorème fondamental sur les déterminants entraîne alors que θ est un multiple du déterminant $p \times p$, i.e.

$$\theta(X_1, \cdots, X_p) = \gamma \cdot \det(X_1, \cdots, X_p).$$

On trouve γ en évaluant les deux membres de l'expression précédente sur la base canonique $(e_1, \cdots, e_p)$ de K^p,

$$\theta(e_1, \cdots, e_p) = \begin{vmatrix} \mathrm{I}_p & C \\ 0 & B. \end{vmatrix}.$$

On peut ensuite montrer par récurrence sur p et en développant le déterminant par rapport à la première colonne que $\theta(e_1, \cdots, e_p) = \det B$. On a alors

$$\theta(X_1, \cdots, X_p) = \det B \cdot \det(X_1, \cdots, X_p).$$

En considérant que $X_1, \cdots, X_p$ sont les colonnes d'une matrice A, on obtient bien l'expression du déterminant par blocs voulue.

Pour le polynôme de caractéristique de M, on a donc

$$\chi_M = \det(M - X\, I_n) = \det(A - X\,\mathrm{I}_p)\det(B - X\,\mathrm{I}_q) = \chi_A\,\chi_B$$

avec $n = p + q$, car

$$M - X\,\mathrm{I}_n = \begin{pmatrix} (A - X\,\mathrm{I}_p) & -C \\ 0 & (B - X\,\mathrm{I}_q) \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. (a) Rappelons que deux matrices $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ sont semblables s'il existe $P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$. Lorsque c'est le cas, ces matrices ont le même polynôme caractéristique car

$$\begin{aligned}\chi_A &= \det(A - X\,\mathrm{I}_n) = \det\left(PBP^{-1} - X\,\mathrm{I}_n\right) = \det\left(P(B - X\,\mathrm{I}_n)P^{-1}\right) \\ &= \det(B - X\,\mathrm{I}_n) = \chi_B.\end{aligned}$$

(b) La multiplicité géométrique d'une valeur propre λ est la dimension de l'espace propre associé à cette valeur propre :

$$\mathrm{multgeom}_\lambda(A) = \dim(E_\lambda(A)) \quad \text{où} \quad E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda \mathrm{I}_n)$$

(c) Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A associée au vecteur propre $v \in \mathbb{K}^n$, on a $Av = \lambda v$. Comme $B = P^{-1}AP$, on obtient

$$B(P^{-1}v) = P^{-1}AP(P^{-1}v) = P^{-1}A(PP^{-1})v = P^{-1}(Av) = P^{-1}(\lambda v) = \lambda\, P^{-1}v.$$

Par conséquent, λ est également une valeur propre de B de vecteur propre $P^{-1}v$. On en déduit que la multiplicité géométrique de λ pour B est au moins égale à celle de λ pour A, et les rôles de A et B étant symétriques, on obtient l'égalité.

Exercice 3. Le principe pour trouver le terme général est le suivant : pour $n \in \mathbb{N}$ on forme le vecteur $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$. On a alors

$$X_{n+1} = A \cdot X_n, \qquad \text{avec} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad X_n = A^n X_0.$$

Pour résoudre la récurrence, il faut donc en principe calculer les puissances de la matrice A. On peut toutefois faire l'économie de ce calcul et utiliser le théorème vu au cours. Voyons les deux méthodes.

Méthode 1. On a vu au cours le théorème suivant :

Théorème. *Supposons que la matrice A associée à la récurrence linéaire*

$$x_{k+m} = a_0 x_k + a_1 x_{k+1} + \cdots + a_{m-1} x_{k+m-1},$$

est diagonalisable, alors le terme général de la suite $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ s'écrit

$$x_k = \gamma_1 \lambda_1^k + \cdots + \gamma_s \lambda_s^k.$$

où $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$. On détermine les γ_i à partir des conditions initiales sur la suite.

Dans notre cas, A est une 2×2 matrice de polynôme caractéristique

$$\chi_A = X^2 - 5X + 4 = (X-1)(X-4).$$

Il y a donc 2 valeurs propres distinctes, le spectre de la matrice A est $\sigma(A) = \{1, 4\}$, en particulier A est diagonalisable et on peut appliquer le théorème. On sait donc que

$$x_k = \gamma_1 + \gamma_2 \cdot 4^k.$$

Pour déterminer les γ_i, on utilise les conditions initiales : $x_0 = c_0 = 1$ et $x_1 = c_1 = 3$. On a donc le système linéaire (les γ_i étant les inconnues) :

$$\begin{cases} \gamma_1 + \gamma_2 = 1 \\ \gamma_1 + 4\gamma_2 = 3 \end{cases}$$

En résolvant ce système trivial on trouve $\gamma_1 = \dfrac{1}{3}$ et $\gamma_2 = \dfrac{4}{3}$, et donc finalement :

$$x_k = \gamma_1 \cdot 1^k + \gamma_2 \cdot 4^k = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot 4^k.$$

Par exemple $x_5 = \dfrac{1}{3}(1 + 2 \cdot 4^5) = 2049/3 = 683$.

Méthode 2. On diagonalise la matrice A. On sait déjà que ses valeurs propres sont 1 et 4. On cherche une base propre $\{U, V\}$:

$$AU = U, \quad AV = 4V.$$

On trouve facilement les vecteurs propres $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ (ou des multiples non nuls arbitraires de ces deux vecteurs) ; on a donc la diagonalisation :

$$A = PDP^{-1}, \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \ P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \ P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

donc

$$A^k = PD^kP^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 - 4^k & -1 + 4^k \\ 4 - 4^{k+1} & -1 + 4^{k+1} \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$A^k X_0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 - 4^k & -1 + 4^k \\ 4 - 4^{k+1} & -1 + 4^{k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + 2 \cdot 4^k \\ 1 + 2 \cdot 4^{k+1} \end{pmatrix}.$$

On a donc $x_0 = \frac{1}{3}(1 + 2 \cdot 4^k)$. C'est donc une méthode bien plus lourde et d'un intérêt limité.

Remarque 1. Même si la matrice n'est pas diagonalisable, on peut tout de même utiliser la méthode astucieuse. Si l'une des racines a une multiplicité positive, on considère au lieu de termes de la forme λ^n des termes de la forme $n^k \lambda^n$ et on vérifie sans peine que cet Ansatz fonctionne toujours. On peut même oublier la matrice A. Si on a une suite de la forme

$$x_{n+2} = a\, x_{n+1} + b\, x_n,$$

on considère le polynôme $X^2 - aX - b$. Si ses racines $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ sont distinctes, alors il exist $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{C}$ tels que

$$x_n = \gamma_1\, \lambda_1^n + \gamma_2\, \lambda_2^n.$$

Si $\lambda_1 = \lambda_2$, alors

$$x_n = \gamma_1 \lambda_1^n + \gamma_2\, n\lambda_1^n.$$

On sait déjà que $\{\lambda_1^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une solution de cette récurrence linéaire, donc il suffit de montre que $\{x_n = \lambda_2^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en est également une. En effet, on a

$$x_{n+2} = (n+2)\lambda_1^{n+2}.$$

D'autre part, on a

$$a\, x_{n+1} + b\, x_n = a(n+1)\lambda_1^{n+1} + b\, n\, \lambda_1^n.$$

Comme $X^2 - aX - b = (X - \lambda_1)^2$, on obtient $a = 2\lambda_1$ et $b = -\lambda_1^2$. On a donc

$$a\, x_{n+1} + b\, x_n = 2(n+1)\lambda_1^{n+2} - n\, \lambda_1^{n+2} = (n+2)\lambda_1^{n+2} = x_{n+2}.$$

On vérifie de même que ce principe fonctionne pour les récurrence d'ordre arbitraire. Avec une récurrence de la forme

$$x_{n+3} = a\, x_{n+2} + b\, x_{n+1} + c\, x_n,$$

on factorise $P = X^3 - aX^2 - bX - c = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)(X - \lambda_3)$. Si les racines sont distinctes, une base de solutions est fournie par

$$\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, \lambda_3^n\}\,.$$

Si une racine est double (on peut supposer sans perte de généraliser que c'est λ_1), alors une base de solution est fournie par

$$\{\lambda_1^n, n\, \lambda_1^n, \lambda_2^n\}\,.$$

Enfin, si λ_1 est une racine triple, la base de solutions est donnée par

$$\left\{\lambda_1^n, n\, \lambda_1^n, n^2\lambda_1^n\right\}$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier ces assertions (qui se généralisent en tout degré).

Exercice 4. Comme dans l'exercice précédent, pour $n \in \mathbb{N}$ on forme le vecteur $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix}$. Alors

$$X_{n+1} = A \cdot X_n, \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A = X^3 - 2X^2 - X + 2 = (X-1)(X+1)(X-2).$$

Il y a donc 3 valeurs propres distinctes, $\sigma(A) = \{1, -1, 2\}$, en particulier A est diagonalisable et comme dans l'exercice précédent, on pose

$$x_k = \gamma_1 + \gamma_2 \cdot (-1)^k + \gamma_3 \cdot 2^k.$$

Pour déterminer les γ_i, on utilise les conditions initiales : $x_0 = 0$, $x_1 = 2$ et $x_2 = 6$:

$$\begin{cases} x_0 = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_2 & = 0 \\ x_1 = \gamma_1 - \gamma_2 + 2\gamma_2 & = 2 \\ x_2 = \gamma_1 + \gamma_2 + 4\gamma_2 & = 6 \end{cases}$$

On résout ce système (par exemple, on retire la première ligne à la dernière, puis on ajoute la première à la deuxième), on trouve :

$$\gamma_1 = -2, \qquad \gamma_2 = 0, \qquad \gamma_3 = 2.$$

Et donc finalement :

$$x_k = \gamma_1 + \gamma_2 \cdot (-1)^k + \gamma_3 \cdot 2^k = 2^{k+1} - 2.$$

Par exemple $x_5 = 2^6 - 2 = 62$ et $x_{10} = 2046$.

Exercice 5. 1. La matrice des cofacteurs d'une matrice carrée $A \in \mathrm{M}_n(K)$ est la matrice $\mathrm{Cof}(A) = (c_{ij}) \in \mathrm{M}_n(K)$, où c_{ij} est le cofacteur d'indices (i, j) de A, c'est-à-dire le déterminant de la sous-matrice $A(i \mid j)$ obtenue en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de A, multiplié par $(-1)^{i+j}$:

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A(i \mid j))$$

La formule de Laplace nous dit que

$$A \cdot \mathrm{Cof}(A)^\top = \mathrm{Cof}(A)^\top \cdot A = \det(A)\mathrm{I}_n,$$

en particulier si $\det(A) \neq 0$, alors $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\mathrm{Cof}(A)^\top$.

2.
$$\mathrm{Cof}(X) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Cof}(Y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ a^2 & -a & 1 \end{pmatrix}$$

3. Pour illustrer la formule, commençons par un exemple numérique. Considérons la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$
alors
$$\det(A + tE_{2,3}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & (2+t) \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} = 8 + 11t,$$
En calculant ce déterminant par développement selon la 3^{eme} colonne, on « voit » que le coefficient de t doit être le cofacteur c_{23}. On a en effet
$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} = 8 \quad \textbf{et} \quad c_{23} = (-1)^{2+3} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = 11.$$

Pour le cas général, on calcule le déterminant de $(A + tE_{ij})$ en développant par rapport à la
$j^{\text{ème}}$ colonne :
$$\begin{aligned} \det(A + t\,E_{i,j}) &= (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A(1|j)) + \cdots + (-1)^{i+j}(a_{ij} + t) \det(A(i|j)) \\ &\quad + \cdots + (-1)^{n+j} a_{nj} \det(A(n|j)) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det(A(k|j)) + t.(-1)^{i+j} \det(A(i|j)) \\ &= \det(A) + t \cdot c_{ij} \end{aligned}$$

4. Un élément $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ peut être vu comme un élément $X = (x_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dont les coordonnées sont doublement indicées. La matrice $E_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est alors l'élément dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la coordonnée d'indice (i, j), qui vaut 1. La fonction $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ est clairement différentiable (c'est un polynôme de n^2 variables).

En appliquant le résultat du point (c) et la définition de la notion de dérivées partielles on obtient
$$\begin{aligned} \frac{\partial \det}{\partial x_{ij}}(X) &= \lim_{t\to 0} \frac{\det(X + tE_{ij}) - \det(X)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(\det(X) + tc_{ij}) - \det(X)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{tc_{ij}}{t} = c_{ij}, \end{aligned}$$
où l'on a noté c_{ij} le cofacteur de X en position (i, j).

5. Voici un code en Python dont l'input est une matrice A donnée comme une liste de n listes, contenant chacune n éléments. Le premier code calcule un déterminant (récursivement, par développement selon la première colonne). Le second code identifie la sous-matrice $\widetilde{A}(i \mid j)$ et le troisième code produit la matrice des cofacteurs.

```
def determinant(A):
    n = len(A)
    if n == 1:
        return A[0][0]
    elif n == 2:
        return A[0][0]*A[1][1] - A[0][1]*A[1][0]
    else:
        det = 0
        for j in range(n):
            sign = (-1)**j
            sub_det = determinant(submatrix(A, 0, j))
            det += sign * A[0][j] * sub_det
        return det

def submatrix(A, i, j):
    return [row[:j] + row[j+1:] for row in (A[:i]+A[i+1:])]


def cofactors_matrix(A):
    n = len(A)
    C = [[0]*n for i in range(n)]
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            sign = (-1)**(i+j)
            M = submatrix(A, i, j)
            cofactor = sign * determinant(M)
            C[i][j] = cofactor
    return C
```

Exercice 6. 1. En effet, la dernière colonne de $A - 2\,\mathrm{I}_6$ est nulle, ce qui montre que $\det(A - 2\,\mathrm{I}_6) = 0$, et ainsi l'existence d'un vecteur propre. Par exemple, on voit facilement que $A \cdot e_5 = 2e_5$ où $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^5$. Donc $\lambda = 2$ est une valeur propre de cette matrice et e_5 est un vecteur propre associé.

2. Pour trouver la multiplicité géométrique de $\lambda = 2$ on cherche le rang de la matrice

$$B = 2I_5 - A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -3 & 9 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ -3 & -6 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Une forme échelonnée de cette matrice est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc le rang de $(2I_5 - A)$ est 3, la multiplicité géométrique cherchée est donc

$$\mathrm{multgeom}_2(A) = \dim \mathrm{Ker}(2I_5 - A) = 5 - \mathrm{rang}(2I_5 - A) = 5 - 3 = 2.$$

Exercice 7. On répète la preuve classique de la formule du binôme de Newton en remarquant que $N^j = 0$ si $j \geq m$ et $\binom{k}{j} = 0$ si $j > k$ (car il y a zéro sous-ensemble à j éléments dans un ensemble de k éléments si $j > k$).

Soulignons que l'argument ne marche pas si $NQ \neq QN$.

Exercice 8. On sait que la fonction $f_\lambda(x) = e^{\lambda t}$ vérifie l'équation $f_\lambda' = \lambda f_\lambda$. Donc tout $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de D et la fonction f_λ est un vecteur propre associé à λ.

Si f est un autre vecteur propre de valeur propre λ, on a

$$D(e^{-\lambda t} f)(t) = -\lambda\, e^{-\lambda t} f(t) + e^{-\lambda t} f'(t) = -\lambda\, e^{-\lambda t} f(t) + \lambda\, e^{-\lambda t} f(t) = 0.$$

Par conséquent, $t \mapsto e^{-\lambda t} f(t)$ est de dérivée identiquement nulle, ce qui montre par connexité de $\mathbb{R}$ que c'est une fonction constante. Il existe donc $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(t) = c\, e^{\lambda t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 9. Soit φ une fonction propre de l'opérateur T, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $T\varphi = \lambda\varphi$. On a donc

$$e^{5x} \int_0^1 e^{-s} \varphi(s) ds = \lambda\, \varphi(x) \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Cette identité implique que

$$\lambda\int_0^1 e^{-x}\varphi(x)dx=\int_0^1 e^{4x}\left(\int_0^1 e^{-s}\varphi(s)ds\right)dx=\frac{e^4-1}{4}\int_0^1 e^{-s}\varphi(s)ds.$$

Par conséquent, si

$$\mu=\mu(\varphi)=\int_0^1 e^{-s}\varphi(s)ds,$$

on obtient l'équation

$$\lambda\mu=\frac{e^4-1}{4}\mu.$$

Si $\lambda\neq 0$, alors $\mu\neq 0$. En effet, la fonction propre φ n'étant pas identiquement nulle, et la fonction exponentielle ne s'annulant jamais, l'identité (1) montre que $\mu\neq 0$. Par conséquent, on obtient

$$\lambda=\frac{e^4-1}{4},$$

et l'espace propre associé à cette valeur propre est (en vertu de (1))

$$\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(x\mapsto e^{5x}).$$

qui est un sous-espace vectoriel de dimension 1. La multiplicité géométrique associée à la valeur propre $\dfrac{e^4-1}{4}=13.3995\cdots$ est donc égale à 1.

Si $\lambda=0$, alors l'espace propre associé est donné par

$$\mathrm{Ker}(T)=\mathscr{C}^0(\mathbb{R})\cap\left\{\varphi:\int_0^1 e^{-s}\varphi(s)ds=0\right\}.$$

Il est facile de voir que c'est un espace vectoriel de dimension infinie. Deux exemples simples de familles de fonctions linéairement indépendantes dans le noyau de l'opérateur T sont

$$\left\{\varphi_k(s)=e^s\sin(2k\pi s)\mid k\in\mathbb{N}^*\right\}\quad\text{et}\quad\left\{\psi_k(s)=e^s\left(s-\frac{1}{2}\right)^{2k+1}\mid k\in\mathbb{N}\right\}$$

La valeur propre $\lambda=0$ est donc de multiplicité géométrique infinie.

Remarque 2. La solution de l'année précédente consistait à dériver l'équation, mais on voit que ce n'était nullement nécessaire. On peut néanmoins la répéter en remarquant qu'un vecteur propre associé à une valeur propre non-nulle doit être différentiable et même de classe $\mathscr{C}^\infty$.